Проведен ряд численных экспериментов с волноводом квадратного сечения. Дисперсионная кривая для основной волны представлена на Рис.3. Граница области аппроксимировалась функцией

$$r(\phi) = \left(\left(\frac{\cos\phi}{d}\right)^{2m} + \left(\frac{\sin\phi}{d}\right)^{2m}\right)^{-1/2m}.$$

Здесь $p = d/\pi\omega$, d – длина стороны квадрата. Зависимость точности вычислений от количества базисных функций для $p = 0.7$ представлена на Рис.4. Метод имеет внутреннюю сходимость по N.

Литература

[1] Карчевский Е.М. Определение постоянных распространения собственных волн диэлектрического волновода методами теории потенциала // Ж. выч. мат. и мат. физ. – 1998. – Т.38, №1. – С.132–136.

[2] Jablonski T.F. Complex modes in open lossless dielectric waveguides // J. Opt. Soc. Am. A. – 1994. – Vol.11, 4 / April.

Тумаков Д.Н. (Казань)

Обоснование метода усечения БСЛАУ задачи о скачке поперечного сечения плоского волновода

Пусть в плоскости $x = 0$ состыкованы два полубесконечных волновода с металлическими стенками $\alpha < z < \beta$, $x < 0$ и $a < z < b$, $x > 0$, причем $a \le \alpha < \beta \le b$. Обозначим $h^+ = b - a$, $h^- = \beta - \alpha$, $\Gamma^\pm = \pi/h^\pm$ $\chi = h^-/h^+$ и

$$\varphi_n^-(z) = \sin\Gamma^- n(z-\alpha), \quad \varphi_n^+(z) = \sin\Gamma^+ n(z-a), \quad n = 1, 2, \ldots$$

в случае ТЕ-поляризации или

$$\varphi_n^-(z) = \cos\Gamma^- n(z-\alpha), \quad \varphi_n^+(z) = \cos\Gamma^+ n(z-a), \quad n = 0, 1, \ldots$$

в случае ТМ-поляризации.

Пусть из левого волновода на стык набегает собственная волна с потенциальной функцией

$$u^0(x,z) = E_y^0(x,z) = A^0 e^{-i\gamma_{n^0}^- x}\varphi_{n^0}^-(z), \quad x < 0,$$

где

$$\gamma_n^{\pm} = \sqrt{(k^{\pm})^2 - (\Gamma^{\pm} n)^2}, \quad n = (0), 1, 2, \ldots$$
$$k^{\pm} = k_0\sqrt{\varepsilon^{\pm}}, \ k_0 = 2\pi/\lambda.$$

Задача дифракции электромагнитной волны на ступенчатой неоднородности эквивалентна БСЛАУ [1]

$$\frac{h^+}{2} A_k + \frac{2}{h^-} \sum_{n=(0)1}^{\infty} A_n \gamma_n^+ \sum_{m=(0)1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_m^-} I_{nm}\, I_{km} = 2A^0 I_{kn^0}, \tag{1}$$
$$k = (0), 1, 2, \ldots,$$

где

$$I_{nm} = \int_\alpha^\beta \varphi_n^+(t)\varphi_m^-(t)dt, \quad n, m = (0), 1, 2, \ldots$$

Применим метод усечения (редукции) для решения системы (1). В случае ТЕ-поляризации усеченная система имеет вид

$$\frac{h^+}{2} A_k + \frac{2}{h^-} \sum_{n=1}^{N} A_n \gamma_n^+ \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{\gamma_m^-} I_{nm}\, I_{km} = 2A^0 I_{kn^0}, \quad k = 1, \ldots, N. \tag{2}$$

Обоснование метода проведем с помощью абстрактной приближенной схемы [2].

Выберем точные и аппроксимирующие пространства решений и правых частей

$$X = h^s, \quad \|x\|^2 = \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}(1+n^2)^s |x_n|^2,$$

$$\overline{X} = \overline{h}^s, \quad \|\overline{x}\|^2 = \textstyle\sum_{n=1}^{N}(1+n^2)^s |\overline{x}_n|^2; \tag{3}$$

$$Y = l_2, \ \|y\|^2 = \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} |y_n|^2, \quad \overline{Y} = \overline{l}_2, \ \|\overline{y}\|^2 = \textstyle\sum_{n=1}^{N} |\overline{y}_n|^2,$$

где $s \geq 0$ (пространства h^s и $\overline{h}^s$ являются дискретными аналогами пространства Соболева H^s). Матрицы коэффициентов систем (1) и (2) определяют точный и аппроксимирующий операторы $A : X \to Y$, $\overline{A} : \overline{X} \to \overline{Y}$. Пусть $T_Y : Y \to \overline{Y}$ и $S_X : \overline{X} \to X$ – операторы аппроксимации и интерполяции.

Выполняются неравенства

$$\|(\overline{A} - T_Y A S_X)\overline{x}\|_{\overline{Y}} \le m_1(N, M)\|\overline{x}\| \quad \forall \overline{x} \in D(\overline{A}), \tag{4}$$

$$\|(S_Y T_Y - I) A S_X \overline{x}\|_Y \le m_2(N)\|\overline{x}\| \quad \forall \overline{x} \in D(\overline{A}), \tag{5}$$

где

$$m_1^2(N, M) \le \frac{2}{h^-} \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \left(1 + n^2\right)^{-s} \left|\gamma_n^+\right|^2 \left| \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_m^-} I_{nm} I_{km} \right|^2, \tag{6}$$

$$m_2^2(N) \le \frac{2}{h^-} \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(1 + n^2\right)^{-s} \left|\gamma_n^+\right|^2 \left| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_m^-} I_{nm} I_{km} \right|^2. \tag{7}$$

Покажем, что $m_1(N, M) \to 0$, $m_2(N) \to 0$ при $N \to \infty$ $M \to \infty$. Предварительно получим два вспомогательных неравенства.

Лемма 1 . *Если r - иррациональное число и*

$$c = \max_n \frac{1}{rn - [rn]}, \quad n = 1, 2, \dots$$

то

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{|m^2 - r^2 n^2|\,|m^2 - r^2 k^2|} \right)^2 \le$$

$$\le \left(\frac{5 + 5c + \ln\left(2r^4 c\right)}{r^2} \right)^2 \frac{1}{N^2} \left(7 + 12\ln N + 14\ln^2 N + 4\ln^3 N\right). \tag{8}$$

Лемма 2 . *Если $M \ge dN$, $d > a$, то*

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{m^4}{\left(m^2 - a^2 n^2\right)^2 \left(m^2 - a^2 k^2\right)^2} \le$$

$$\le \frac{1}{(d-a)^2} \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N^2} + \frac{1}{d-a} \frac{1}{N^3} \right). \tag{9}$$

Теперь оценим величины $m_1(N, M)$ и $m_2(N)$. Обозначим

$$A = \max\left(\left(\frac{[\delta]}{\delta - [\delta]}\right)^{1/2}, \left(\frac{[\delta]+1}{\delta+1-[\delta]}\right)^{1/2}\right), \quad \delta = \frac{k^-}{\Gamma^-}.$$

Лемма 3 . *Если* $s \in (0, 1]$, *то*

$$m_2(N) \le D\left(\frac{\ln^{3/2} N}{N^s} + \frac{1}{N^s}\right), \tag{10}$$

где

$$D = \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2} A(h^-)^{1/2}(h^+)^2 \left(5 + 5C + \ln\left(2\chi^4 C\right)\right),$$

$$C = \max_{n=1,2,\dots} \frac{1}{\chi n - [\chi n]}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Доказательство. Прежде всего,

$$|I_{nm}| = \left|\int\limits_\alpha^\beta \sin\Gamma^+ n(t-a)\ \sin\Gamma^- m(t-\alpha)\, dt\right| =$$

$$= \left|\frac{\Gamma^- m}{(\Gamma^- m)^2 - (\Gamma^+ n)^2}\left(\sin\Gamma^+ n(\alpha - a) - (-1)^m \sin\Gamma^+ n(\beta - a)\right)\right| \le$$

$$\le \frac{2}{\Gamma^-}\frac{m}{|m^2 - \chi^2 n^2|} \tag{11}$$

и

$$\frac{1}{|\gamma_m^-|} = \frac{1}{\sqrt{|(k^-)^2 - (\Gamma^- m)^2|}} = \frac{1}{\Gamma^-}\frac{1}{\sqrt{|m^2 - \delta^2|}} \le \frac{1}{\Gamma^-}\frac{A}{m}. \tag{12}$$

Тогда, учитывая неравенство (8),

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=N+1}^{\infty}\left(1+n^2\right)^{-s}\left|\gamma_n^+\right|^2\left|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_m^-}I_{nm}I_{km}\right|^2 \le$$

$$\le N^{2-2s}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=N+1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{|\gamma_m^-|}|I_{nm}||I_{km}|\right)^2 \le$$

$$\leq \left(\frac{A}{\Gamma^-}\right)^2 \left(\frac{2}{\Gamma^+}\right)^4 N^{2-2s} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{|m^2 - \chi^2 n^2|\,|m^2 - \chi^2 k^2|} \right)^2 \leq$$

$$\leq \left(\frac{A}{\Gamma^-}\right)^2 \left(\frac{2}{\Gamma^+}\right)^4 \left(5 + 5C + \ln\left(2\chi^4 C\right)\right)^2 \times$$

$$\times N^{-2s} \left(7 + 12 \ln N + 14 \ln^2 N + 4 \ln^3 N\right).$$

Наконец,

$$\left(7 + 12 \ln N + 14 \ln^2 N + 4 \ln^3 N\right) \leq \pi^2 \left(\ln^{3/2} N + 1\right)^2.$$

Лемма 4 . *Пусть* $s \in (0, 1]$. *Если* $M \geq (\chi + \theta)N$, $\theta > 0$, *то*

$$m_1(N, M) \leq \frac{C_1}{N^s} + \frac{C_1}{N^{s+1/2}} + \frac{C_2}{N^{s+1}}, \tag{13}$$

где

$$C_1 = \frac{4\sqrt{2}}{\pi^3} A \frac{(h^-)^{5/2}}{\theta}, \qquad C_2 = \frac{4\sqrt{2}}{\pi^3} A \frac{(h^-)^{5/2}}{\theta^{3/2}}.$$

Доказательство. Используем неравенства (9), (11) и (12). Тогда

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \left(1 + n^2\right)^{-s} |\gamma_n^+|^2 \left| \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_m^-} I_{nm} I_{km} \right|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{1}{|\gamma_m^-|^2} \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \left(1 + n^2\right)^{-s} |\gamma_n^+|^2 \sum_{m=M+1}^{\infty} |I_{nm}|^2 |I_{km}|^2 \leq$$

$$\leq \frac{A^2}{M} \left(\frac{2}{\Gamma^+}\right)^4 \left(\frac{1}{\Gamma^-}\right)^2 \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{N} n^{2-2s} \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{m^4}{\left(m^2 - \chi^2 n^2\right)^2 \left(m^2 - \chi^2 k^2\right)^2} \leq$$

$$\leq \frac{A^2}{M} N^{2-2s} \left(\frac{2}{\Gamma^+}\right)^4 \left(\frac{1}{\Gamma^-}\right)^2 \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{m^4}{(m^2-\chi^2 n^2)^2 (m^2-\chi^2 k^2)^2} \leq$$

$$\leq \frac{A^2}{\theta^2}\left(\frac{2}{\Gamma^+}\right)^4 \left(\frac{1}{\Gamma^-}\right)^2 \frac{1}{N^{2s}}\left(1+\frac{1}{N}+\frac{1}{\theta}\frac{1}{N^2}\right).$$

Непосредственно отсюда следует утверждение леммы.

Доказательство единственности точного решения проведем стандартным методом (см., например, [3]). Из неравенств (10) и (13) следует, что величины $m_1(N, M)$ и $m_2(N)$ можно сделать сколь угодно малыми за счет увеличения N. Следовательно, редуцированная система также может иметь только одно решение. Из альтернативы Фредгольма следует, что ее решение существует.

Теорема 1 . *При достаточно большом N и $M \geq (\chi+\theta)N$, $\theta > 0$ СЛАУ (2) имеет имеет единственное решение при любой правой части.*

Можно показать, что все пункты утверждения IV абстрактной приближенной схемы [2] выполнены. Отсюда следует

Теорема 2 . *Пусть $s \in (0,1]$. Последовательность приближенных решений БСЛАУ (1), построенных по решениям СЛАУ (2), сходится в пространстве h^s к точному решению со скоростью*

$$\|x - S_X \overline{x}\|_{h_S} \leq O\left(\frac{1}{N^\beta}\right), \quad 0 < \beta < s.$$

Так как пространство $X = h^s$ – полное, то предел последовательности приближенных решений принадлежит этому же пространству. Следовательно, БСЛАУ (1) имеет хотя бы одно решение.

Теорема 3 . *БСЛАУ (1) имеет единственное решение в пространстве h^s при любой правой части из l_2.*

Таким образом, метод усечения решения БСЛАУ (1) обоснован.

Литература

[1] Плещинский Н.Б., Тумаков Д.Н. Метод частичных областей для скалярных координатных задач дифракции электромагнитных волн в классах обобщенных функций // Препринт 2000–1. Казанское матем. об-во. - Казань, 2000. - 50 с.

[2] Плещинский Н.Б. К абстрактной теории приближенных методов решения линейных операторных уравнений // Изв. вузов. Математика. - 2000. - №3. - С.39-47.

[3] Ильинский А.С., Фоменко Е.Ю. Исследование бесконечномерных систем линейных алгебраических уравнений II рода в волноводных задачах дифракции // Ж. выч. мат. и мат. физ. - 1991. - 31, №3. - С.339-352.

Цупак А.А. (Пенза)

Метод Галеркина для решения интегрального уравнения в задаче дифракции на локально неоднородном теле в случае H-поляризации

1. Уравнения Максвелла задачи дифракции.

Пусть ограниченная трехмерная область Q характеризуется тензорами диэлектрической и магнитной проницаемостей $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\mu}$, компоненты которых суть функции координат. Граница ∂Q области Q – кусочно-гладкая поверхность. Вне области Q параметры среды задаются скалярными константами: $\hat{\varepsilon} \equiv \varepsilon_0 \hat{I}$, $\hat{\mu} \equiv \mu_0 \hat{I}$, где $\hat{I}$ – единичный тензор. Возбуждающее поле $\{\vec{E}^{(0)}, \vec{H}^{(0)}\}$ гармонически зависит от времени в виде $e^{-i\omega t}$. Требуется определить значение полного электромагнитного поля в $\mathbf{R}^3 \setminus \partial Q$.